"Limites"

Limites Notáveis

Dados $a>0$ e $p\in\mathbb{R}$ temos que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^p}=+\infty,\ a>1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a^x}{x^p}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a(x)}{x^p}=0,\ a>1$ e $p\in\mathbb{R}^+$

Casos particulares e suas generalizações:

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ *e* $\lim\limits_{f(x)\to0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1$
- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$ *e* $\lim\limits_{f(x)\to0}\dfrac{\ln[f(x)+1]}{f(x)}=1$
-
- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sen(x)}{x}=1$ *e* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sen[f(x)]}{f(x)}=1$
- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg(x)}{x}=1$ *e* $\lim\limits_{f(x)\to0}\dfrac{tg[f(x)]}{f(x)}=1$

Operações com limites

- $+\infty+\infty=+\infty$
- $-\infty-\infty=-\infty$
- $+\infty\times(+\infty)=+\infty$
- $-\infty\times(-\infty)=+\infty$
- $+\infty\times(-\infty)=-\infty$
- $-\infty\times(+\infty)=+\infty$
- $\dfrac{\pm\infty}{0}=\pm\infty$
- $\dfrac{0}{\pm\infty}=0$

Indeterminações

- $+\infty-\infty$
- $0\times\infty$
- $\dfrac{0}{0}$
- $\dfrac{\infty}{\infty}$

Limite de uma função segundo Heine

Dada uma função f, real de variável real, e a um ponto de acumulação do seu domínio, temos que:

- se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ então $\lim_{x_n \to a} f(x_n) = b$, com (x_n) uma sucessão tal que $x_n \in D_f \setminus \{a\}$.

Teoremas

- Se uma função tem limite num ponto, então esse limite é único:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \wedge \quad \lim_{x\to a} f(x) = c \quad \Rightarrow \quad b = c$$

- O limite de uma função constante é a própria constante:

$$Se \quad f(x) = k, \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad então \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} k = k$$

Assimptotas

Assimptota Vertical

$x = a$ é assimptota vertical do gráfico de f se ocorre *uma* das seguinte situações:

- $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Assimptota horizontal

$y = b$ é assimptota horizontal do gráfico de f se:

- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$, ou
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$

Assimptota Oblíqua

$y = mx + b$ com $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$ é assimptota oblíqua do gráfico de f se:

- $\lim_{x\to +\infty} \left[f(x) - (mx + b) \right] = 0$, ou
- $\lim_{x\to -\infty} \left[f(x) - (mx + b) \right] = 0$.

Nota que, nestes casos temos respectivamente que:

- $m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $b = \lim_{x\to +\infty} \left(f(x) - mx \right)$, ou
- $m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $b = \lim_{x\to -\infty} \left(f(x) - mx \right)$.