Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

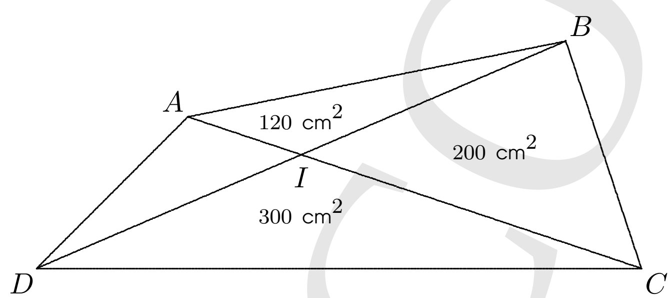
XXV OPM - 1ª Eliminatória - 8.11.2006 - Categoria B - 10º/12º

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Sendo l a quantidade de leite, c a quantidade de chocolate e n a quantidade de nata, tem-se que $l+c+n = 15+16+18+19+20+31 = 119$. Uma vez que $2c = l$, vem $3c+n = 119$, pelo que, $119-n$ é múltiplo de 3. Analisando as possibilidades, conclui-se que $n = 20$. O contentor que tem a nata é o de 20 litros.

2. Sejam A, B, C e D os vértices do quadrilátero e I a intersecção das diagonais, como está indicado na figura.



Sejam h_1 e h_2 as alturas dos triângulos $[BCI]$ e $[DIC]$, respectivamente, relativamente à base $[IC]$. Então,

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\text{área } [BCI]}{\text{área } [DIC]} = \frac{2}{3}.$$

Por outro lado, relativamente à base $[AI]$, as alturas dos triângulos $[ABI]$ e $[AID]$ são, respectivamente, h_1 e h_2. Assim,

$$\frac{\text{área } [ABI]}{\text{área } [AID]} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{3}.$$

Portanto,

$$\text{área } [AID] = \frac{3}{2}\text{ área } [ABI] = \frac{3\times 120}{2} = 180 \text{ cm}^2.$$

3. Os números de 1 a 9 ocupam $2\times 9 = 18$ caracteres da primeira linha. Nesta linha sobram $100-18 = 82$ caracteres que dão para 27 números de dois algarismos, isto é, para os números de 10 a 36. Na segunda linha cabem 33 números de 2 algarismos, isto é do 37 ao 69. Na terceira linha podem ser colocados os restantes 30 números de 2 algarismos, que ocupam 90 caracteres, sobrando espaço para os números 100 e 101. Em cada uma das 35 linhas seguintes são colocados 25 números de 3 algarismos, pelo que, no fim da $38^{\underline{a}}$ linha está o número $101+35\times 25 = 976$. Na linha 39 aparecem os restantes 23 números de 3 algarismos, que ocupam 92 caracteres, sobrando espaço para o número 1000. Em cada uma das restantes 61 linhas são colocados 20 números de 4 algarismos, pelo que no fim da $100^{\underline{a}}$ linha está o número $1000+61\times 20 = 2220$.

4. **Solução 1:** Se a soma de um múltiplo de 3, $3k$, com 1 é um quadrado perfeito, então

$$3k + 1 = m^2,$$

para algum inteiro m. Assim, $3k = m^2 - 1 = (m+1)(m-1)$ logo, 3 divide $m+1$ ou 3 divide $m-1$. Deste modo, $m+1 = 3a$ ou $m-1 = 3a$, para algum inteiro a, donde $k = a(3a-2)$ ou $k = a(3a+2)$. Note-se que $a(3a-2) < a(3a+2) < (a+1)(3(a+1)-2) < (a+1)(3(a+1)+2)$, isto é, os dois valores de k associados a $a+1$ são superiores aos dois valores de k associados a a. Logo, o múltiplo $3k$ escrito na posição $2a$ é obtido quando $k = a(3a+2)$, para cada inteiro a. Portanto, o $2006^{\underline{o}}$ múltiplo obtém-se quando $a = 1003$ e $k = 3020033$, ou seja, o $2006^{\underline{o}}$ múltiplo é $3 \times 3020033 = 9060099$.

Solução 2: Se a soma de um múltiplo de 3, $3k$, com 1 é um quadrado perfeito, então

$$3k + 1 = m^2,$$

para algum inteiro m. Assim, cada múltiplo que se escreve está associado a um único quadrado perfeito m^2, maior ou igual a 4, cujo resto na divisão por 3 é 1. Note-se que se m^2 não é múltiplo de 3, então m não é múltiplo de 3. Reciprocamente, se m não é múltiplo de 3, então m é da forma $m = 3a+1$ ou $m = 3a+2$, para algum inteiro a. Em cada um destes casos, m^2 é a soma de um múltiplo de 3 com 1. Consequentemente, cada múltiplo escrito está associado a um único inteiro m, maior ou igual a 2, que não é múltiplo de 3. Assim, o $2006^{\underline{o}}$ múltiplo que se escreve está associado ao $2006^{\underline{o}}$ inteiro, maior ou igual a 2, que não é múltiplo de 3, ou seja, o $2007^{\underline{o}}$ inteiro que não é múltiplo de 3. Em cada três inteiros consecutivos dois não são múltiplos de 3. Uma vez que $2006 = 2 \times 1003$, o número $3 \times 1003 + 1 = 3010$ é o $2007^{\underline{o}}$ inteiro que não é múltiplo de 3. Portanto, o $2006^{\underline{o}}$ múltiplo que se escreve é $(3010)^2 - 1 = 9060099$.